

Supplément de dérivation

Origine des quatre quantités utilisées dans la Lettre, et dérivation de la bosse

Luc Côté — Chercheur indépendant, Québec, Canada

Objet. Ce supplément dérive les quantités que la Lettre utilise — la fraction de présence $f = 1/16$, le seuil $r_t = \sqrt[3]{2A}$, le facteur d'extinction et son 2π , la règle de superposition à plusieurs corps, et la bosse au-dessus du seuil — à partir d'un unique postulat : une interface de tension dont l'équilibre statique est $\sigma \cdot \text{Tr}(K) = \rho_E$. Il ne présente aucune autre partie du cadre sous-jacent. Chaque quantité est obtenue sans paramètre ajusté ; aucune n'est calibrée sur les données de binaires.

1. La fraction de présence $f = 1/16$

Ce qu'est la fraction de présence. La source ne contribue pas à l'interface Σ en permanence : dans chaque champ, elle passe une partie de sa phase sur Σ — présente — et une partie en dehors de Σ — absente. La fraction de présence f mesure la proportion de phase pendant laquelle elle est effectivement présente sur Σ .

D'où vient la valeur 1/16. Le problème comporte quatre structures : les trois champs et l'interface qui les sépare. Dans chacune, la source est tantôt présente, tantôt en dehors ; moyennée sur les phases, elle est présente la moitié du temps — un facteur $1/2$ par structure. Les quatre étant indépendantes, la source n'est effectivement présente sur l'interface que lorsque les quatre coïncident, et des états indépendants se composent en produit :

$$f = (1/2)^4 = 1/16.$$

C'est une propriété de dénombrement, non un ajustement. Le nombre $1/16$ n'a aucun degré de liberté : il est fixé dès qu'on compte quatre structures présentes chacune la moitié du temps.

2. Le seuil $r_t = \sqrt[3]{2A}$

La transition sépare deux régimes selon la comparaison entre la variation de la perturbation et la courbure du fond. Au-dessus du seuil, le gradient de la perturbation varie vite devant la courbure du fond : celui-ci demeure invisible et la dynamique est newtonienne. En dessous, la perturbation varie plus lentement que le fond ne courbe, et le développement autour d'un fond plat perd son sens — c'est là que la dynamique dévie.

Le rayon où le gradient de la perturbation métrique croise la courbure du fond — le rayon de croisement — s'écrit avec les seules grandeurs du cadre, l'énergie de l'objet E et la tension σ :

$$r_t = \sqrt[3]{2A} = \sqrt[3]{E/(6\pi\sigma)},$$

où $A = E/(12\pi\sigma)$ est la constante de forme du champ propre de la source. Aucun paramètre n'est ajusté. Le seuil s'écrit avec les seules grandeurs de l'objet et s'applique, avec le même coefficient, à toute échelle où une source de tension rencontre le fond ; pour un couple d'étoiles, il tombe à plusieurs milliers d'unités astronomiques.

Dépendance en masse. Comme E croît avec la masse de l'objet, le seuil croît comme $\sqrt[3]{M}$. Il n'est donc pas universel : la position de la marche se déplace d'un couple à l'autre selon sa masse (Figure 2 de la Lettre).

Accélération au seuil. L'accélération newtonienne évaluée au rayon de croisement est indépendante de la source : elle vaut $12\pi G\sigma/c^2$. C'est l'échelle d'accélération unique à laquelle la transition s'opère, quelle que soit la masse. Comme la tension σ qui la fixe est héritée de la densité d'énergie du vide, et non d'une échelle d'accélération, sa coïncidence avec le seuil observé des binaires est une conséquence de la valeur cosmologique de ρ_Λ , non une calibration.

Provenance de σ . La tension d'interface est fixée par deux quantités mesurées indépendamment, la densité d'énergie du vide ρ_Λ et la constante de Newton G , par inversion de la relation $G = c^4\rho_\Lambda/(12\pi\sigma^2)$: $\sigma = \sqrt[3]{c^4\rho_\Lambda/12\pi G} = 4,12 \times 10^{16} \text{ J}\cdot\text{m}^{-2}$. Aucune échelle d'accélération n'entre dans cette détermination. La courbure de fermeture $k = \rho_\Lambda/\sigma$ en est une grandeur dérivée. La valeur de σ est donc indépendante des données de binaires larges.

3. Le facteur d'extinction et son 2π

Au-dessus du seuil, la coordonnée de traversée cesse d'osciller librement et devient évanescence. Son comportement est régi par l'équation de phase du mode dont le potentiel effectif est le seuil lui-même : sous le seuil, le mode est oscillant (l'équipartition de phase est retrouvée, et donne le 1/16 de la section 1) ; au-dessus, il est évanescence.

L'équation de phase. En notant φ l'angle de traversée et ψ l'amplitude du mode, celui-ci obéit à une équation de phase dont le potentiel effectif est le seuil lui-même,

$$d^2\psi/d\varphi^2 = (x - 1) \cdot \psi ,$$

avec deux régimes de part et d'autre de $x = 1$. Pour $x < 1$, le membre de droite est négatif et le mode est oscillant, $\psi \sim \cos(\sqrt{1-x} \cdot \varphi)$, $\sin(\sqrt{1-x} \cdot \varphi)$ — l'équipartition de phase, qui donne le 1/16 de la section 1. Pour $x > 1$, le membre de droite est positif et le mode est évanescence, $\psi \sim e^{(-\sqrt{x-1}) \cdot \varphi}$. La coordonnée de traversée φ est un angle de période 2π (un tour complet), de sorte que l'amplitude de présence sur un tour complet décroît comme $e^{(-2\pi\sqrt{x-1})}$: le facteur d'extinction et son 2π se lisent directement sur le mode, ils ne sont pas posés.

Origine du 2π . La coordonnée de traversée est un angle, dont la période naturelle est un tour complet. Le facteur 2π qui apparaît dans l'exposant est cette période — l'angle qui se referme sur lui-même. La fraction d'absence au-dessus du seuil décroît donc comme

$$1 - f_1 = \frac{1}{2} \cdot e^{(-2\pi\sqrt{x-1})} ,$$

continue au seuil $x = 1$. Le 2π n'est pas ajusté : il est la période de l'angle de traversée, imposée par la géométrie du mode.

Le coefficient 0,323. La pente supplémentaire sous le seuil est fixée par une chaîne — interférence en amplitudes, tensions d'échelle, équation de forme — dont le résultat, dans ce secteur du cadre, s'écrit $(2 \cdot 2/3) \cdot \sqrt{f(1-f)} \cdot \sqrt{A/r}$. Le facteur $2 \cdot (2/3) = 4/3$ combine un facteur 2 issu de l'interférence des deux amplitudes et les 2/3 de l'équation de forme (le tiers manquant en géométrie sphérique) ; il ne contient aucun paramètre libre. Le rapport dynamique s'écrit alors

$$g_{obs}/g_N = 1 + (4/3) \cdot \sqrt{f(1-f)} / \sqrt{x} = 1 + 0,323 / \sqrt{x} ,$$

le nombre 0,323 étant $(4/3) \cdot \sqrt{f(1-f)}$ évalué à $f = 1/16$. Une fois comptés les trois champs et l'interface, et le facteur 4/3 fixé par la chaîne ci-dessus, la pente sous le seuil ne comporte aucun degré de liberté : la comparaison de cette valeur avec les données de binaires est un test, non un ajustement.

4. La superposition à plusieurs corps

L'effet d'un champ local sur un couple d'étoiles requiert de composer deux sources. Le cadre le fait exactement, par une propriété de structure de son équation de champ.

Déplacements additifs. L'équation de champ $\sigma \cdot \text{Tr}(K) = \rho_E$ est linéaire dans le déplacement u : si deux sources produisent chacune une solution, leur somme est solution. Les déplacements s'additionnent, $u_1 + u_2$.

Cadences multiplicatives. Or la cadence — le facteur temporel qui porte l'effet dynamique — est exponentielle dans ce même déplacement. Pour deux corps :

$$e^{(2k(u_1+u_2))} = e^{(2k \cdot u_1)} \cdot e^{(2k \cdot u_2)} .$$

Les cadences se multiplient, exactement comme elles le font entre couches d'un même puits. Le principe de composition qui fixe le second ordre s'étend ainsi au problème à plusieurs corps, exactement soluble au niveau du champ, sans aucun paramètre d'effet de champ externe. En d'autres termes, dans ce cadre la gravité ne gravite pas : toute la non-linéarité réside dans l'habillage de la géométrie, aucune dans l'équation du champ.

Conséquence — le plateau. Pour un couple plongé dans un champ de fond, le déplacement du fond u_{loc} s'ajoute à celui du couple avant de passer dans l'exponentielle ; à grande séparation, où le champ propre du couple s'efface, seule subsiste la cadence du fond. Le rapport tend alors vers un plateau fixé par la seule pente baryonique locale $x_{loc} = g_{bar} \cdot c^2 / (6\pi G \sigma)$:

$$\gamma(s \rightarrow \infty) = 1 + 0,323 / \sqrt{x_{loc}} .$$

La hauteur du plateau n'est donc pas un paramètre : elle est fixée par la valeur numérique de la pente baryonique locale g_{bar} , que les modèles publiés situent dans l'intervalle $g_{bar} \approx (1,5-1,9) \times 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, d'où $\gamma(\infty) \approx 1,56-1,63$. Sa dérivation

ne contient aucune quantité ajustée sur les binaires. La dépendance du plateau à la valeur locale du champ de fond est une prédiction : le plateau s'élève là où la pente baryonique locale est plus faible.

5. La bosse au-dessus du seuil : dérivation et projection

La Lettre signale une bosse fine du rapport juste au-dessus du seuil. Cette bosse admet une dérivation fermée, sans paramètre, à partir de la même chaîne que la pente sous le seuil ; sa hauteur au pic est une fraction exacte, et sa survie à la projection sur les observables est vérifiée par le même tirage Monte-Carlo que celui des figures.

La forme unifiée. Le coefficient (4/3) et le terme d'interférence $\sqrt[3]{f(1-f)}$ de la section 3 ne dépendent pas du régime ; seule change la fraction de présence f . Le rapport des deux tensions d'échelle — celle du pli, $\sigma(2u/r^2)$, et celle du vide, $\sigma(2/r)$ — vaut exactement la pente newtonienne, $\sigma(2u/r^2)/\sigma(2/r) = u/r = x$: la variable x est ce rapport interne. Sous le seuil, le vide domine et l'équipartition fixe $f = 1/16$; au-dessus, le pli occupe le front et la coordonnée de traversée devient évanescence, de sorte que la présence remonte selon

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{(-2\pi\sqrt[3]{x-1})} \quad (x \geq 1), \text{ continue au seuil où } f = \frac{1}{2}.$$

Le rapport dynamique s'écrit donc de part et d'autre du seuil sous une forme unique,

$$g_{\text{obs}}/g_N = 1 + (4/3) \cdot \sqrt[3]{f(1-f)} / \sqrt[3]{x},$$

avec $f = 1/16$ sous le seuil et $f = f(x)$ au-dessus. Il n'y a aucun ingrédient nouveau : la même chaîne gouverne les deux régimes.

La hauteur du pic, exacte. Au seuil, la présence traverse sa valeur d'interférence maximale $f = 1/2$: le terme $\sqrt[3]{f(1-f)}$ y atteint son maximum $1/2$. Le rapport γ culmine donc à

$$\gamma_{\text{pic}} = 1 + (4/3) \cdot (1/2) = 1 + 2/3 = 1,667 \text{ (exactement)},$$

sans degré de liberté — imposé par $f = 1/2$ et le coefficient 4/3 déjà fixé sous le seuil. Le pic redescend ensuite vers le plateau à mesure que la présence sature ($f \rightarrow 1$) et que l'interférence s'éteint : $\gamma \approx 1,43$ à $x = 1,05$, $\sim 1,32$ à $x = 1,10$. La bosse est donc étroite et haute, centrée sur le seuil.

Survie à la projection. Reste à savoir si cette structure fine survit au passage dans le plan des observables. On la projette par le même tirage Monte-Carlo que celui des figures de la Lettre : $N = 6 \times 10^5$ systèmes à demi-grands axes log-uniformes sur $[0,8 ; 40]$ kUA, excentricités thermiques $p(e) = 2e$, phases orbitales échantillonnées (équation de Kepler), visée isotrope ; l'effet du champ de fond est composé exactement, $x = \sqrt{(x_{\text{propre}}^2 + x_{\text{loc}}^2 + 2 \cdot x_{\text{propre}} \cdot x_{\text{loc}} \cdot \mu)}$, μ étant le cosinus de l'angle entre les deux gradients. Pour une masse totale de $1,5 M_\odot$ ($r_t \approx 3,9$ kUA), le rapport projeté avec la bosse dépasse le rapport lissé de

$$\Delta\gamma \approx +0,06 \text{ (2,5–3 kUA)}, +0,09 \text{ (3–3,5 kUA)}, +0,07 \text{ (3,5–4 kUA)},$$

l'écart retombant à $+0,02$ dès 4–5 kUA. La bosse n'est donc pas effacée par la projection : elle laisse un épaulement observable dans la fenêtre 3–4 kUA, visible sur la Figure 1 de la Lettre juste avant la montée vers le plateau. Cette signature — un épaulement étroit, indexé sur le seuil r_t et donc déplacé par la masse du couple — constitue une prédiction supplémentaire, distincte du plateau, et exige un échantillon résolvant finement la zone du seuil.

Récapitulatif

Les quantités de la Lettre découlent toutes du postulat unique d'une interface de tension : $f = 1/16$ par dénombrement (trois champs, une interface) ; $r_t = \sqrt[3]{(2A)}$ comme rayon de croisement du gradient de perturbation et de la courbure du fond ; le 2π comme période de l'angle de traversée dans l'équation de phase du mode ; la superposition multiplicative comme conséquence de la linéarité de l'équation de champ dans le déplacement ; et la bosse au-dessus du seuil comme la même chaîne d'interférence, avec $f = 1/2$ au seuil donnant le pic exact $\gamma = 1 + 2/3$, dont un épaulement à 3–4 kUA survit à la projection. Aucune n'est calibrée sur les données de binaires larges : la comparaison de la Lettre avec Gaia est donc un test, non un ajustement.